MA1 – přednáška 11. 11. 2019

1. Připomenutí minulé přednášky – snaha o vyšetření vlastností funkce pomocí derivací funkce – pokus s funkcí $f(x) = x^2 e^{-x}$

a dokončení vyšetřením, kde je funkce konvexní, resp. konkávní a nalezení inflexních bodů (viz. zápis – přednáška 6.11.)

2. Upřesnění použitých návodů "pro vyšetřování vlastností funkce užitím derivací" (slíbeno minule)

a) l'Hospitalovo pravidlo (viz už přednáška 6.11. – „přesná" formulace)

Další příklady použití l'Hospitalova pravidla:

1) $$\lim_{x\to\infty} \left(x - \ln(x+1)\right) = \text{„}\infty - \infty\text{"} \underset{(i)}{=} \lim_{x\to\infty} x\left(1 - \frac{\ln(x+1)}{x}\right) =$$
$$= \text{„}\infty\left(1 - \frac{\infty}{\infty}\right)\text{"} \underset{(ii)}{=} \lim_{x\to\infty} x\left(1 - \frac{\ln(x+1)}{x}\right) = \text{„}\infty(1-0)\text{"} \underset{AL}{=} \infty$$

(i) „vytkli jsme z rozdílu „∞ − ∞" tu „∞" (asi větší")
a převedli rozdíl „∞ − ∞" na limitu součinu

(ii) zde je neurčitý výraz „$\frac{\infty}{\infty}$":

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} \underset{l'H.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \text{„}\frac{1}{\infty}\text{"} = 0$$

(a pak aritmetika limit vede k výsledku)

a) $\underline{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}} = \text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"} \underset{l'H.}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \underset{(i)}{=}$

$$= \text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"} \underset{l'H.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \quad ?? \ (ii)$$

(i) možná už zde si někdo všimne, že zadaná limita se jen „dostala do jmenovatele (převrácená hodnota) a „nevylepšila" se

(ii) tedy už je to zřejmé – l'Hospital „zde tedy nepomůže (další užití pravidla „nemá smysl") – tedy zbývá úprava!

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x} \underset{(x>0)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} \underset{AL+VLSF}{=} \text{„}\sqrt{\frac{1}{\infty}+1}\text{"} = \underline{\underline{1}}$$

b) „neobvyklé" důsledky l'Hospitalova pravidla

l'Hospitalovo pravidlo lze často hezky „použít k dopočítávání „derivací ve „špatných" bodech, tj. v bodech, kde buď nelze „užít tabulky derivací a pravidel výpočtu derivací, nebo kde byla funkce dodefinována (spojitě):

Z definice $f'_{(\pm)}(a) = \lim\limits_{x \to a(\pm)} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = „\frac{0}{0}“$, pokud je funkce f spojitá v bodě $a\,(\pm)$ (tj. $\lim\limits_{x \to a(\pm)} f(x) = f(a)$).

Pak lze „užít“ l'Hospitalovo pravidlo (když to jde dle předpokladů věty) a dostaneme:

$$f'_{(\pm)}(a) = \lim_{x \to a(\pm)} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{l'H.}{=} \lim_{x \to a(\pm)} \frac{f'(x)}{1}$$ (pokud tato limita existuje). Tedy máme tvrzení:

<u>Věta (o „dopočítávání“ derivací).</u>

Nechť (1) f je spojitá v bodě $a \in R$

(2) existuje $\lim\limits_{x \to a(\pm)} f'(x)$.

Pak existuje i $f'_{(\pm)}(a) = \lim\limits_{x \to a(\pm)} f'(x)$.

<u>(Důkaz – viz „nahoře“)</u>

(Užití této věty občas vede k jednodušším výpočtům derivací ve sporných bodech.)

<u>Příklad 1:</u> <u>$f(x) = \cos\sqrt{x}$</u>, $a=0$ (viz přednáška 4.11)

$Df = \langle 0, +\infty)$, $f'(x) = -\sin\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$ v $(0,+\infty)$;

f je spojitá v bodě $0+$, lze „zkusit“

$$f'(0+) = \lim_{x \to 0+} f'(x) = \lim_{x \to 0+} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{2},$$

neboť $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \underset{VLSF}{=} \lim\limits_{t \to 0+} \frac{\sin t}{t} = 1$ $(\sqrt{x} = t)$

Příklad 2 (opět přednáška 4.11.) – $f(x) = \sqrt{\ln(x^2+1)}$:

$D f = \mathbb{R}$, f je spojitá v $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2+1)}} \cdot \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{\ln(x^2+1)}} \quad , \text{pro } x \neq 0$$

$$f'_{\pm}(0) = \lim_{x\to 0\pm} f'(x) = \lim_{x\to 0\pm} \frac{1}{x^2+1} \cdot \frac{x}{\sqrt{\ln(x^2+1)}} = \pm 1$$

a dostali jsme se ke stejné limitě (4.11.) jako u výpočtu $f'(0)$ z definice – byla to

$$\lim_{x\to 0\pm} \frac{\sqrt{\ln(x^2+1)}}{x} = \lim_{x\to 0\pm} \sqrt{\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}} \cdot \operatorname{sgn} x = \pm 1$$

$\to 1$ („tabulková" + VLSF)

Příklad 3 – viz opět 4.11. – $\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) f je definovaná i spojitá v $\mathbb{R}$ (v $a = 0$ – užitím „skákačky")

2) $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

3) 4.11. jsme spočítali $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

(užití věty o skákačkách)

A zde pozor !! $f'(0) = 0$ – existuje, ale

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) \text{ neexistuje!}$$

$\left(\lim_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{x} = 0\right.$, ale fce $\cos\frac{1}{x}$ v bodě $\underline{\underline{0}}$ limitu nemá!! $\left.\right)$

! Větu o dopočítávání derivací nemůžeme „otočit"

Příklad 4 $\quad f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$; $\quad D_f = \mathbb{R}$

1) $D_f = \mathbb{R}$, neboť $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leq 1$, tj. $-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$ pro $x \in \mathbb{R}$:

($\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leq 1 \iff |2x| \leq 1 + x^2$, ale toto platí:

pro $x \geq 0$: $\quad 2x \leq 1 + x^2 \iff 0 \leq (1 - 2x + x^2) \iff$

$0 \leq (1-x)^2$

a pro $x < 0$: $\quad -2x \leq 1 + x^2 \iff 0 \leq (1+x)^2$)

2) Když „počítáme" $f'(x)$, je problém pro $x = \pm 1$:

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}}_{\neq 0 \iff x \neq \pm 1 \ !} \cdot \frac{2\left[1 + x^2 - x \cdot 2x\right]}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1 + 2x^2 + x^4 - 4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \text{(krátíme } (1+x^2)\text{)}$$

(a $1 - 2x^2 + x^4 = (1-x^2)^2$)

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)} = \frac{2}{1+x^2} \cdot \frac{1-x^2}{|1-x^2|} =$$

$$= \frac{2}{1+x^2} \cdot \operatorname{sgn}(1-x^2) \quad \text{pro } x \neq \pm 1$$

| f je spojitá v bodě $a = 1$ ($\pm$), a existuje $\lim_{x \to 1\pm} f'(x) = \mp 1$,
| tj. i existuje $\underline{f'_{\pm}(1) = \mp 1}$

Výpočet $\lim\limits_{x\to 1+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2}{1+x^2}\cdot(-1) = -1$

$(1-x^2<0 \Rightarrow \operatorname{sgn}(1-x^2)=-1$ pro $x>1)$

a $\lim\limits_{x\to 1-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{2}{1+x^2}\cdot 1 = 1$

$(1-x^2>0 \Rightarrow \operatorname{sgn}(1-x^2)=1$ pro $x<1)$.

c) Věty o užití derivace a druhé derivace pro vyšetřování monotonie funkce, extrémů, konvexity a konkávnosti funkce, bodů inflexe grafu funkce.

Definice: 1) funkce rostoucí, neklesající, klesající, nerostoucí na množině $M \subset D_f$

2) lokální extrém (lokální maximum, resp. minimum), ostrý lokální extrém f na M; globální extrémy fce na $M \subset D_f$

3) fce konvexní, resp. konkávní na $M \subset D_f$

4) inflexní bod grafu f

Věty: (zapište podrobně)

1) o souvislosti $f'(x)$ a monotonie f v intervalu

2) nutná podmínka „lokálního extrému" fce

3) o souvislosti $f''(x)$ a konvexnosti, resp. konkávnosti fce f v intervalu

4) nutná podmínka pro to, aby v bodě byla inflexe

5) Věta o nabývání mezihodnot (pro fci spojitou na intervalu (věta Darbouxova)

Vyšetření průběhu funkce – „návod" a příklady:

Návod:

1) Df, základní vlastnosti fce f (znaménko; nulové body; f(0), pokud $0 \in Df$; lichost, sudost, periodicita)
spojitost funkce

2) limity funkce (v krajních bodech intervalů z Df),
asymptoty grafu (tj. přímky, ke kterým se graf f „blíží"): a) je-li $\lim\limits_{x \to +\infty\ (-\infty)} f(x) = L \in R$, pak je to přímka „vodorovná" $y = L$

b) je-li $\lim\limits_{x \to a(\pm)} f(x) = +\infty\ (-)$, pak je to přímka „svislá": $x = a$

c) a „šikmá" asymptota $y = ax + b$, v $(\pm\infty)$, když
$\lim\limits_{x \to +\infty\ (-)} (f(x) - (ax+b)) = 0$

a odtud lze udělat „odhad" grafu funkce

3) vyřešit $f'(x)$ a odtud intervaly, kde je funkce rostoucí, resp. klesající, nalezení lokálních, resp. globálních extrémů, existují-li (lépe vyšetření existence lokálních, resp. globálních extrémů)

4) $f''(x)$ a odtud intervaly, kde je funkce konvexní, resp. konkávní, vyšetření existence inflexních bodů

5) „náčrtek" grafu funkce

Příklady:

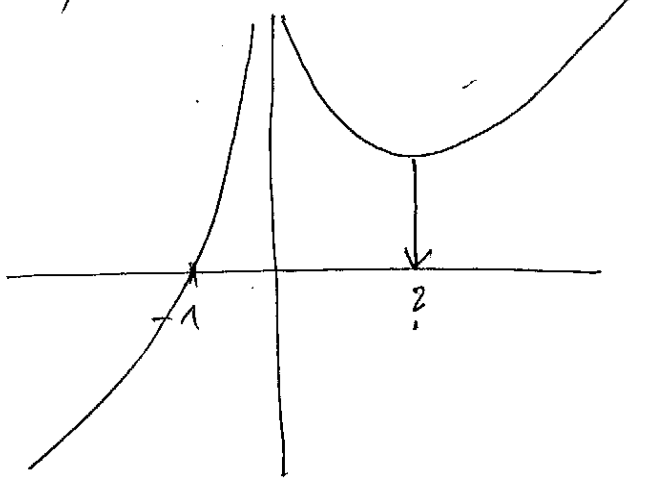
1. Jednoduchý (na začátek): $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$

1) $\mathcal{D}f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; $f(x) = 0 \iff x = -1$ $\left(f(x) = \frac{x^3+1}{x^2} \right)$;
$f(x) > 0$ v $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$, $f(x) < 0$ v $(-\infty, -1)$

2) f je spojitá v $\mathcal{D}f$ (tj. v každém bodu $x \in \mathcal{D}f$)
$\lim\limits_{x\to 0} \left(x + \frac{1}{x^2} \right) = „0 + \frac{1}{0^+}“ = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(x + \frac{1}{x^2} \right) = „\pm\infty + \frac{1}{\infty}“ = \pm\infty$;

tj. osa y (tj. $x=0$) je svislá asymptota
pro $x \to \pm\infty$ je $\frac{1}{x^2} \sim 0$, tj. asi bude i šikmá asymptota – na tomto příkladu si vysvětlíme (na konci) a zobecníme pak, jak najít šikmou asymptotu (a „kdy“ asi existují)

odhad grafu:



díky limitám $\pm\infty$ funkce nemá globální extrémy,
v $(0, +\infty)$ bude ale lokální minimum (>0);
teď přibližný odhad „prohnutí“ grafu;

3) <u>vyšetření $f'(x)$</u>: $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3} = \frac{x^3-2}{x^3}$

$$f'(x) = 0 \iff x = \sqrt[3]{2}$$

Tedy máme:

f'	$+$	0	$-$	$\sqrt[3]{2}$	$+$
	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

v intervalu $(-\infty,0)$ je $f'(x)>0 \Rightarrow f$ roste v $(-\infty,0)$

v $(0,\sqrt[3]{2})$ je $f'(x)<0 \Rightarrow f$ klesá v $(0,\sqrt[3]{2}\rangle$

v $(\sqrt[3]{2},+\infty)$ je $f'(x)>0 \Rightarrow f$ roste v $\langle\sqrt[3]{2},+\infty)$

tedy, dále, v bodě $x = \sqrt[3]{2}$ má f ostré lokální minimum
$\left(f(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \right)$

4) <u>$f''(x) = \frac{6}{x^4}$ v D_f</u>,
$f''(x) > 0$ v $(-\infty,0)$ i v $(0,+\infty) \Rightarrow f$ je konvexní
v intervalu $(-\infty,0)$ i v intervalu $(0,+\infty)$
(f nemá inflexní body)

5) <u>a ještě slíbené vyšetření šikmé asymptoty v $+\infty$ $(-\infty)$</u>

a) šikmou asymptotu „může" funkce mít, pokud
v $+\infty$ $(-\infty)$ má „nevlastní limitu

b) „asi" fce „musí" „jít do $+\infty$ $(-\infty)$ rychle jako $\underline{\underline{x}}$?

c) jak toto spočítat? – má-li být asymptotou přímka s rovnicí $y = ax+b$, pak musí být (graf a přímka se „přibližují" pro $x \to (\pm)\infty$)

$$\lim_{x\to(\pm)\infty} \left(f(x) - (ax+b) \right) = 0$$

(limita typu $\infty - \infty$ $(a \neq 0)$)

zkusme: $$0 = \lim_{x\to(\pm)\infty} \left(f(x) - ax - b \right) = \lim_{x\to(\pm)\infty} x \left(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \right) = \text{„} \infty \cdot 0 \text{"}$$

nutně

tj. $\displaystyle\lim_{x\to\infty\,(-\infty)} \left(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \right) = 0$, ale $\displaystyle\lim_{x\to+\infty\,(-)} \frac{b}{x} = 0$, tj.

„musí" být (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty\,(-\infty)} \frac{f(x)}{x} = a$. Potom už

(2) $\displaystyle b = \lim_{x\to(\pm)\infty} \left(f(x) - ax \right)$ (pokud existuje)

Obráceně lze dokázat, že když existují limity (1), (2), graf f má v $+\infty$ $(-\infty)$ asymptotu $y = ax+b$.

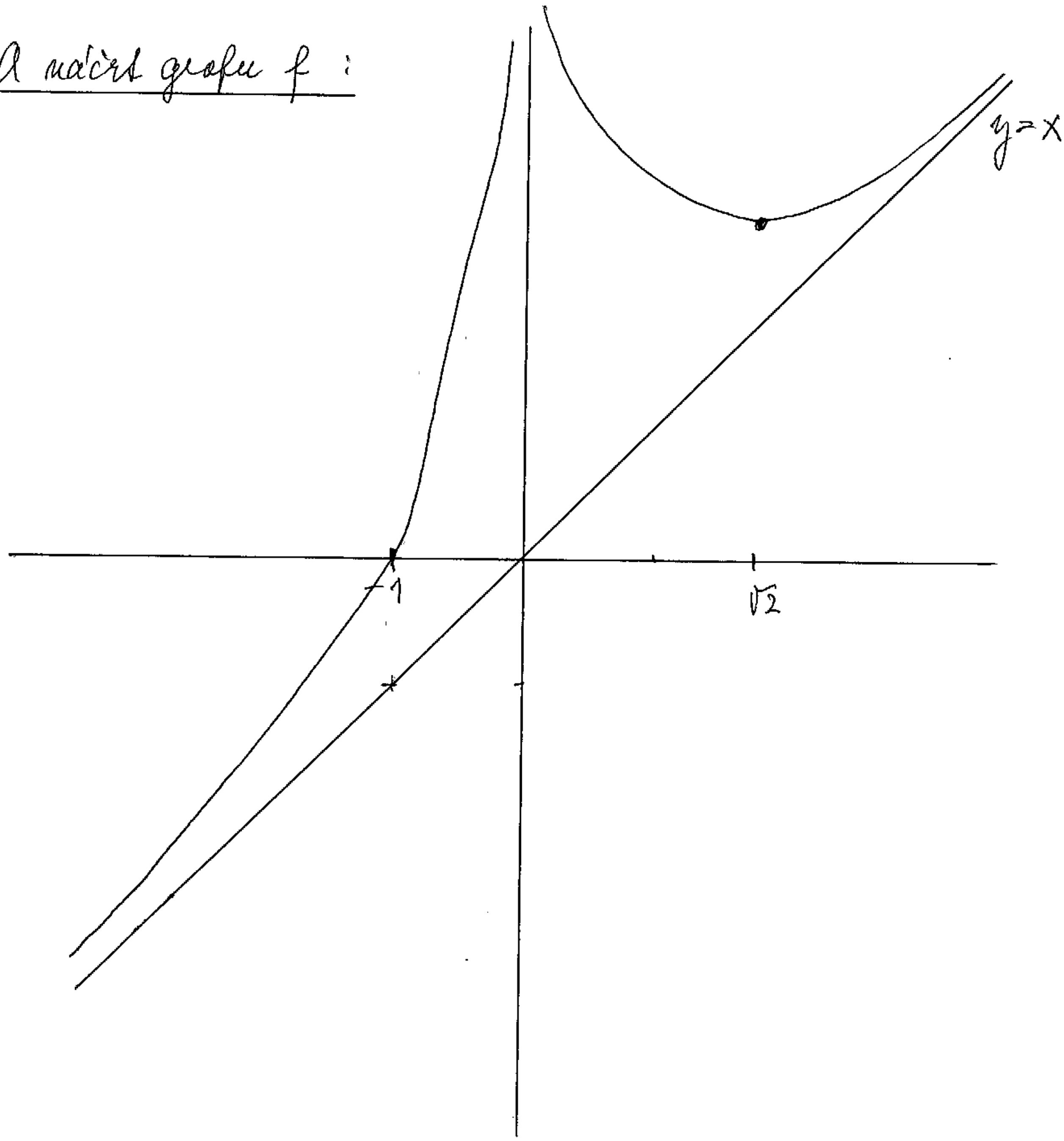
Tedy zde: $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

a (1) $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) = 1$$

(2) $$\lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - ax \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x + \frac{1}{x^2} - 1 \cdot x \right) = 0$$

tj. přímka $y = x$ je asymptota grafu f v $+\infty$ i v $-\infty$.

A náčrt grafu f :



2. příklad : $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$ – viz soubor na „disku"
„průběhy funkcí řešené"
(a posílám)

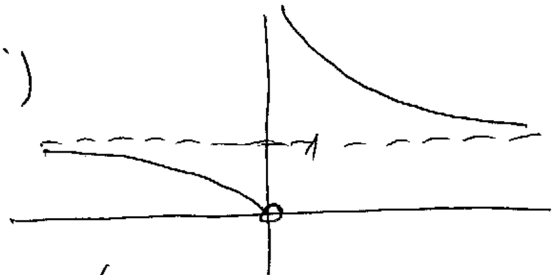
3. příklad: $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ (zkoumali jsme odhad grafu této funkce na začátku limit)

1) $D_f = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, f je spojitá v D_f, $f(x)>0$ v D_f

2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} \underset{\text{VLSF}}{=} \lim\limits_{y\to 0} e^{y} = e^{0} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to +\infty} e^{y} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to -\infty} e^{y} = 0$

odhad grafu (viz před limitami)



zde máme: $y=1$ – vodorovná asymptota v $\pm\infty$

$x=0$ – svislá asymptota (pro $x\to 0+$)

3) monotonie fce:

$f'(x) = e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}$,

$f'(x)<0$ v $(-\infty,0)$ i v $(0,+\infty)$ $\Rightarrow$ f je klesající funkce v $(-\infty,0)$ i v $(0,+\infty)$

f nemá ani globální extrémy ($\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=0$)

ani lokální extrémy (f je ryze monotonní v každém z intervalů $(-\infty,0)$ a $(0,+\infty)$)

4) $\underline{f''(x)} = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{2}{x^3} = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^4}\,(1+2x)$

a tedy $f''(x)=0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$, a vyšetření $f''(x)$:

f'' $\quad - \quad + \quad +$

$\quad \cap \quad -\frac{1}{2} \quad \cup \quad 0 \quad \cup$

a tedy: $f''(x) < 0$ v $(-\infty, -\frac{1}{2}) \Rightarrow f$ je konkávní v $(-\infty, -\frac{1}{2})$

$f''(x) > 0$ v $(-\frac{1}{2}, 0) \Rightarrow f$ je konvexní v $(-\frac{1}{2}, 0)$

$f''(x) > 0$ v $(0, +\infty) \Rightarrow f$ je konvexní v $(0, +\infty)$,

a odtud: f má inflexi v bodě $x = -\frac{1}{2}$

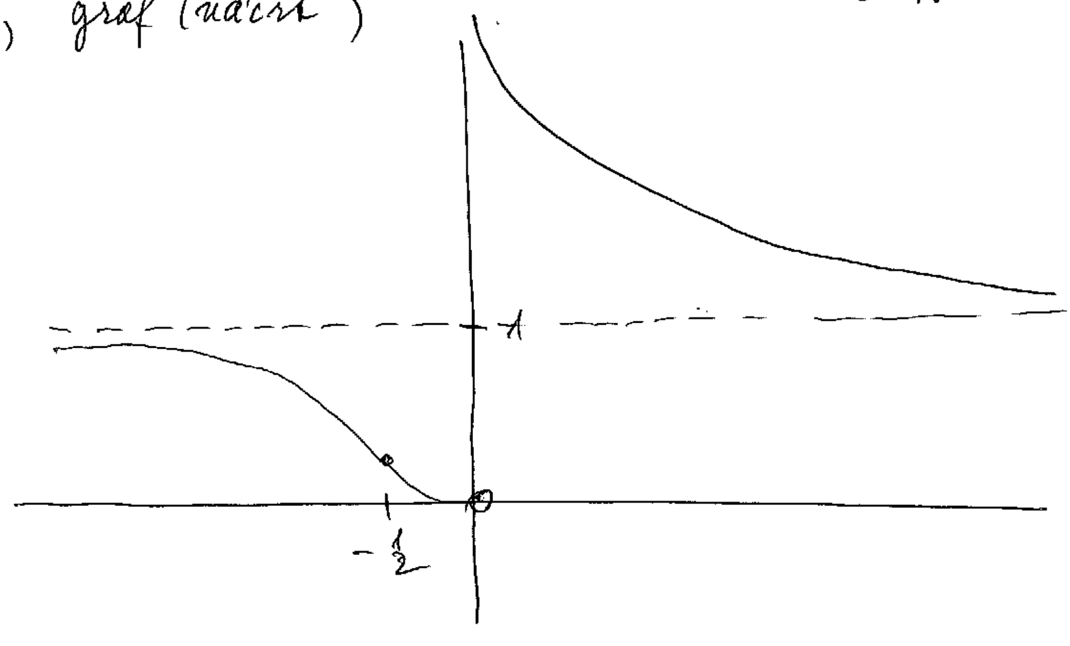
(inflexní bod $[-\frac{1}{2}, e^{-2}]$)

5) a před grafem ještě zajímavost –

$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0-}\left(-\frac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}\right) \underset{\substack{\text{VLSF} \\ (-\frac{1}{x} = t)}}{=} \lim_{t\to+\infty}\left(-t^2 \cdot e^{-t}\right) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{t^2}{e^t}\right) \underset{(\text{l'Hosp. } 2x)}{=} 0$$

6) graf (náčrt)



4. příklad $\quad f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ (stručněji)

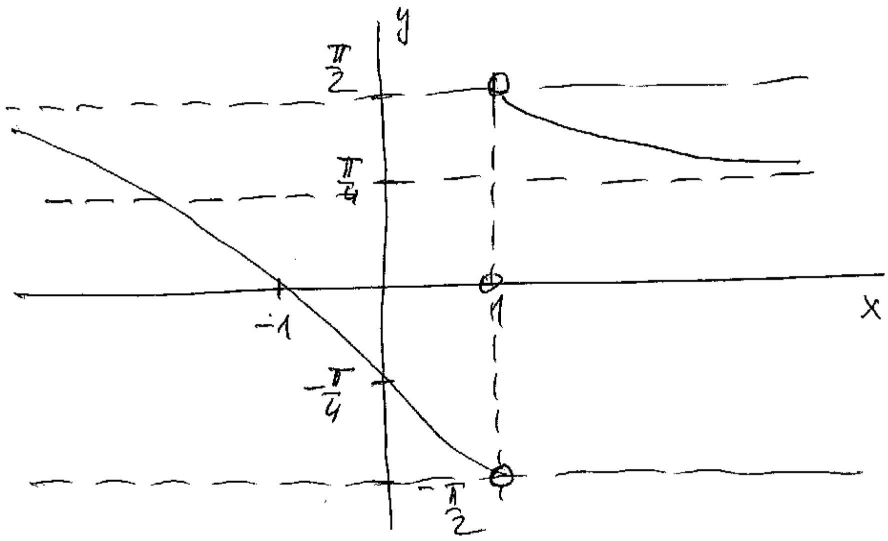
1) $\mathcal{D}f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, $\mathcal{H}f \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$, $f(x) > 0$ pro $\frac{x+1}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
$f(x) < 0$ v $(-1, 1)$

f je spojitá v $\mathcal{D}f$, $f(0) = -\frac{\pi}{4}$ $(= \operatorname{arctg}(-1))$

2) $$\lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \underset{\text{VLSF}}{=} \lim_{y \to 1} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x \to 1\pm} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \underset{\text{VLSF}}{=} \lim_{y \to \pm\infty} \operatorname{arctg} y = \pm\frac{\pi}{2}$$

odhad grafu



3) monotonie funkce (složení rostoucí a klesající funkce – víme, ale „spočítáme" z f')

$$\text{v } \mathcal{D}f:\ f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2 + (x+1)^2} = -\frac{1}{1+x^2}$$

(zajímavé – $\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)' = (-\operatorname{arctg} x)'$ v $\mathcal{D}f$!)

a odtud: $f'(x) < 0$ v $(-\infty, 1)$ i v $(1, +\infty)$ $\Rightarrow$
f je klesající v $(-\infty, 1)$ i v $(1, +\infty)$
tedy nemá lokální extrémy, ale ani globální
(limitu pro $x \to 1\pm$ $\left(= \pm\frac{\pi}{2}\right)$ nenabývá)

4) $f''(x) = \left(-\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

f''	$-$	0	$+$	1	$+$
	$\cap$		$\cup$		$\cup$

tj.: v $(-\infty, 0)$ je f konkávní,
v $(0, 1)$ je f konvexní
$\Rightarrow$ v bodě $x = 0$ má f inflexi

v $(1, +\infty)$ je f konvexní
$f'(0) = -1$ [směrnice tečny v $[0, -\frac{\pi}{4}]$]

asymptoty grafu: $y = \frac{\pi}{4}$ v $\pm\infty$

graf (upřesněný) — náčrt